11 класс

11.1. В произведении семи натуральных чисел каждый сомножитель уменьшили на 3. Могло ли произведение при этом увеличиться ровно в 13 раз? (*Н. Агаханов, И. Богданов*)

Ответ. Да, могло.

Решение. В качестве примера подходит произведение $1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot2\cdot16=32$. После указанной операции получается $(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-1)\cdot13=13\cdot32$.

Замечание 1. Укажем, как придумать этот пример. Предположим, что пять из сомножителей равнялись 1, шестой — 2, а седьмой — a. Их произведение было равно $2a$, а после уменьшения превратилось в $(-2)^5(-1)(a-3)=32a-96$. Значит, при $32a-96=26a$ условие соблюдается. Решая это уравнение, получаем $a=16$. Итак, числа 1, 1, 1, 1, 1, 2, 16 удовлетворяют требованиям.

Замечание 2. Приведённый пример — не единственный. Например, подойдёт также произведение $1^4\cdot29\cdot61\cdot64$, после вычитания переходящий в $(-2)^4\cdot26\cdot58\cdot61$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Предъявлен набор чисел, удовлетворяющий условию — 7 баллов.

Во в целом правильном решении из-за арифметической ошибки получен в качестве ответа набор 1, 1, 1, 1, 1, 2, a, где значение a ошибочно — 5 баллов.

11.2. Вася задумал 8 клеток шахматной доски, никакие две из которых не лежат в одной строке или в одном столбце. За ход Петя выставляет на доску 8 ладей, не бьющих друг друга, а затем Вася указывает все ладьи, стоящие на задуманных клетках. Если количество ладей, указанных Васей на этом ходе, чётно (т.е. 0, 2, 4, 6 или 8), то Петя выигрывает; иначе все фигуры снимаются с доски и Петя делает следующий ход. За какое наименьшее число ходов Петя сможет гарантированно выиграть? (*И. Богданов*)

Ответ. За 2 хода.

Решение. Покажем сначала, как Пете выиграть за 2 хода. Первым ходом он выставит 8 ладей по диагонали доски. Если

он ещё не выиграл, то на диагонали есть нечётное число задуманных Васей клеток. В частности, на ней есть как клетка A, задуманная Васей, так и клетка B, не задуманная им.

Пусть на втором ходу Петя поставит ладьи на 6 диагональных клеток, кроме A и B, а также на клетки C и D, лежащие в тех же строках, что A и B соответственно, и в тех же столбцах, что B и A соответственно. Каждая новая ладья стоит или в одной строке, или в одном столбце с A, то есть их клетки Вася задумать не мог. Значит, в новой конфигурации ладей количество клеток, задуманных Васей, уменьшилось ровно на одну, то есть стало чётным, и Петя выиграл.

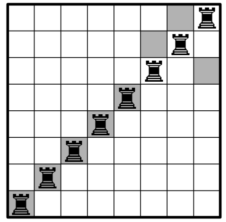

Рис. 5

Осталось показать, что Петя не может гарантированно выиграть за один ход. Пусть у него это получилось. Переставив столбцы доски, можно считать, что он сделал первый ход так, как показано на рис. 1; тогда он не выиграет, если Васины клетки — отмеченные серым на том же рисунке.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказано только, что за один ход Петя не может выиграть — 1 балл.

Доказано только, что за два хода Петя может гарантированно выиграть — 6 баллов.

Приведён верный алгоритм, позволяющий Пете гарантированно выиграть за 2 хода (возможно, без обоснования и без доказательства невозможности гарантированного выигрыша за 1 ход) — не менее 4 баллов.

11.3. Учитель собирается дать детям задачу следующего вида. Он сообщит им, что он задумал многочлен $P(x)$ степени 2017 с целыми коэффициентами, старший коэффициент которого равен 1. Затем он сообщит им k целых чисел $n_1, n_2, \ldots, n_k$, и отдельно сообщит значение выражения $P(n_1)\cdot P(n_2)\cdot\ldots\cdot P(n_k)$. По этим данным дети должны найти многочлен, который мог бы задумать учитель. При каком наименьшем k учитель сможет составить задачу такого вида так, чтобы многочлен, найденный детьми, обязательно совпал бы с задуманным? (*Г. Жуков*)

Ответ. При $k = 2017$.

Решение. Сначала докажем, что $k > 2016$. Пусть учитель использовал некоторое $k \leqslant 2016$, задумав многочлен $P(x)$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k)$. Заметим, что степень многочлена $Q(x)$ также равна 2017, а его старший коэффициент также равен 1. При этом $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$, но $P(x) \neq Q(x)$. Значит, дети могли бы найти многочлен $Q(x)$ вместо $P(x)$, то есть учитель не добился требуемого.

Осталось доказать, что при $k = 2017$ учитель сможет придумать требуемую задачу.

Лемма. *Пусть $P(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, и пусть a и b — различные целые числа. Тогда $P(a) - P(b)$ делится на $a - b$.*

Доказательство. В разности $P(a) - P(b)$ сгруппируем слагаемые по степеням: если $P(x) = p_n x^n + p_{n-1}x^{n-1} + \ldots + p_1 x + p_0$, то $P(a) - P(b) = p_n(a^n - b^n) + p_{n-1}(a^{n-1} - b^{n-1}) + \ldots + p_1(a - b)$, где каждое слагаемое делится на $a - b$. $\square$

Пусть $k = 2017$. Положим $n_i = 4i$ при $i = 1, 2, \ldots, k$; пусть учитель сообщит детям, что $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$. Тогда многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k) + 1$ под условие подходит. Предположим, что ещё какой-то многочлен $Q(x)$ также подходит под условие. Тогда, так как $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k) = 1$ и коэффициенты многочлена $Q(x)$ — целые числа, то $Q(n_i) = \pm 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если найдутся i и j такие, что $Q(n_i) = 1$, а $Q(n_j) = -1$, то разность $Q(n_i) - Q(n_j) = 2$ не делится на $n_i - n_j$, что противоречит лемме. Поэтому все значения $Q(n_i)$ равны между собой и все равны либо 1, либо -1. Однако все значения не могут быть равны -1, так как в произведении $Q(n_1)Q(n_2)\ldots Q(n_k)$ множителей нечетное количество и произведение было бы равно -1. Значит, $Q(n_i) = 1$ при любом $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда разность $P(x) - Q(x)$ — многочлен степени менее k, имеющий хотя бы k корней, то есть этот многочлен тождественно равен 0, и $P(x) = Q(x)$. Противоречие.

Замечание. С использованием леммы можно показать, что

многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_{2017}) \pm 1$ подходит при *любых* различных целых числах $n_1, n_2, \ldots, n_{2017}$.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Полное решение задачи состоит из двух частей:

(*а*) доказательство того, что требуемого нельзя добиться при $k \leqslant 2016$ — оценивается из 2 баллов;

(*б*) доказательство того что при $k = 2017$ требуемого добиться можно — оценивается из 5 баллов.

Если в части (*б*) предъявлен многочлен $P(x) = (x - n_1)(x - n_2)\ldots(x - n_k) \pm 1$ (при некоторых различных целых $n_1, n_2, \ldots, n_k$), но не доказано, что никакой другой многочлен $Q(x)$ не удовлетворяет условию — 2 балла (из пяти).

За использование леммы о делимости $P(a) - P(b)$ на $a - b$ без доказательства баллы не снимаются.

11.4. Равносторонний треугольник ABC вписан в окружность Ω и описан вокруг окружности ω. На сторонах AC и AB выбраны точки P и Q соответственно так, что отрезок PQ проходит через центр треугольника ABC. Окружности Γ_b и Γ_c построены на отрезках BP и CQ как на диаметрах. Докажите, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках, одна из которых лежит на Ω, а другая — на ω. *(А. Акопян)*

Решение. Пусть O — центр треугольника ABC. Обозначим через B_2 и C_2 точки касания ω с AC и AB соответственно, а через B_1 и C_1 — точки Ω, диаметрально противоположные точкам B и C соответственно (см. рис. 6). Тогда точки B_1 и C_1 симметричны O относительно сторон AC и AB соответственно, откуда $\angle OB_1P = \angle B_1OP$ и $\angle OC_1Q = \angle C_1OQ$.

Пусть лучи B_1P и C_1Q пересекают Ω в точках B' и C' соответственно; тогда $\angle PB'B = \angle B_1B'B = 90^\circ$, то есть B' лежит на Γ_b. Аналогично, C' лежит на Γ_c. С другой стороны, $\overset{\frown}{BB'} + \overset{\frown}{CC'} = 2(\angle BB_1B' + \angle CC_1C') = 2(\angle B_1OP + \angle C_1OQ) = 2(180^\circ - \angle B_1OC_1) = 120^\circ = \overset{\frown}{BC}$; это означает, что точки B' и C' совпадают. Итак, Γ_b и Γ_c пересекаются в точке B', лежащей на Ω.

Поскольку $\angle BB_2P = \angle CC_2Q = 90^\circ$, точки B_2 и C_2 лежат на Γ_b и Γ_c соответственно. Пусть продолжение отрезка $B'O$ за

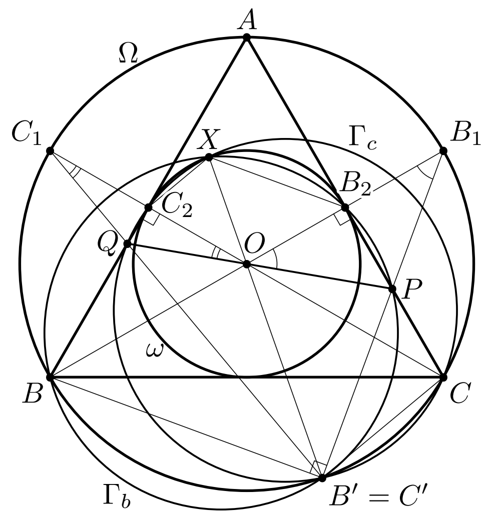

Рис. 6

точку O пересекает ω в точке X. Тогда $OX = OB_2 = OC_2$ и $OB' = OB = OC$, откуда $OB \cdot OB_2 = OB' \cdot OX = OC \cdot OC_2$. Первое из этих равенств означает, что точки B, B_2, B' и X лежат на одной окружности, то есть X лежит на окружности Γ_b. Аналогично, из второго равенства следует, что X лежит на Γ_c. Значит, X и является второй точкой пересечения Γ_b и Γ_c, лежащей на ω.

Замечание 1. После доказательства того, что окружности Ω, Γ_b и Γ_c пересекаются в одной точке B', можно завершить решение и по-другому. Пусть X — вторая точка пересечения Γ_b и Γ_c. Нетрудно видеть, что точка X лежит в угле C_2OB_2. Тогда $\angle B_2XC_2 = \angle B_2XB' + \angle C_2XB' = (180^\circ - \angle B_2PB') + (180^\circ - \angle C_2QB') = (90^\circ - \angle PB_1O) + (90^\circ - \angle QC_1O) = 120^\circ$, что и означает, что X лежит на ω.

Замечание 2. Пусть прямая PQ пересекает прямую BC в точке R. Аналогично можно показать, что окружность Γ_a с диаметром AR также проходит через две общих точки B' и X окружностей Γ_b и Γ_c.

Комментарий. Показано только, что окружности Γ_b и Γ_c пересекаются в двух точках — 0 баллов.

Показано только, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит на Ω — 3 балла.

Показано только, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит на ω — 4 балла.